

Gustaw Rakowski  
Zbigniew Kacprzyk

# Metoda Elementów Skończonych w mechanice konstrukcji

Wydanie trzecie zmienione

Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej  
Warszawa 2016

# Przedmowa do wydania trzeciego

Kolejne wydanie<sup>1</sup> książki ukazuje się po 10 latach od poprzedniego. W tym czasie wydano wiele prac naukowych poświęconych metodzie elementów skończonych. Wiele z nich dotyczy problematyki weryfikacji i walidacji obliczeń, opisu fizycznego materiału. Znacząca liczba prac jest poświęcona integracji środowiska komputerowego wspomagania projektowania i analizy metodą elementów skończonych.

Z punktu widzenia inżyniera konstruktora metoda elementów skończonych ma dwie duże wady: w metodzie brakuje prostych i skutecznych narzędzi oceniających poprawność i wiarygodność obliczeń oraz systemy komputerowe MES są słabo zintegrowane z systemami komputerowego projektowania.

Jeśli chodzi o pierwszą wadę to mimo dużej liczby prac teoretycznych ciągle nie ma rozwiązań umożliwiających łatwą implementację komputerową. Ciągle najważniejszym kryterium poprawności obliczeń złożonych analiz jest wiedza i umiejętności autora obliczeń.

Niewątpliwie kluczową nowością ostatnich lat jest analiza izogeometryczna. W analizie izogeometrycznej ujednocila się opis geometrii używany w systemach projektowania z opisem stosowanym w metodzie elementów skończonych. Analizie izogeometrycznej poświęcony jest nowy, 10 rozdział książki.

Jeśli chodzi o zmiany w oprogramowaniu MES to obserwujemy dynamiczny rozwój automatyzacji obliczeń konstrukcji budowlanych. Od kilku lat promowana jest idea BIM (Building Information Modeling). W ujęciu BIM obiekt budowlany modelowany jest precyzyjnie w przestrzeni trójwymiarowej. Na podstawie takiego modelu wykonuje się model obliczeniowy. Uwzględniając specyfikę modelowania konstrukcji budowlanych czynność tę można w dużym stopniu zautomatyzować.

Z bieżącego wydaniu usunięto tabulogramy przykładów z komendami systemu FEAS/KAM. Wszystkie tabulogramy zostały umieszczone na stronie WWW książki: <http://wektor.il.pw.edu.pl/~zk/mes/2>.

Zasadnicza część książki, dotycząca ogólnych idei MES, zachowuje nadal swą aktualność i nie została zmieniona. Zmianie uległy dodatki. Usunięto dodatek zawierający wprowadzenie do systemu ABAQUS. Usunięty dodatek jest zamieszczony na stronie WWW poświęconej książce.

Po zmianach książka przyjęła formę monografii z zakresu metody elementów skończonych i stanowi kompendium wiedzy podstawowej niezbędnej w pracy inżyniera wykorzystującego MES w obliczeniach czy też studenta studiującego metodę elementów skończonych.

*Zbigniew Kacprzyk*  
Warszawa, listopad w 2015 roku

---

<sup>1</sup>obecne wydanie książki w rzeczywistości jest czwartym: pierwsze wydanie ukazało się w 1993 roku, pierwsze poprawione - w styczniu 2005, drugie wydanie - w grudniu 2005

<sup>2</sup>jeśli adres będzie nieosiągalny to drugim adresem jest <http://www.feas.pl>

# Spis treści

Przedmowa	7
Przedmowa do wydania drugiego	9
Przedmowa do wydania trzeciego	11
<b>1 Wprowadzenie</b>	<b>13</b>
1.1 Ogólna charakterystyka metod obliczeniowych . . . . .	13
1.2 Syntetyczny opis metody elementów skończonych (MES) . . . . .	20
1.3 Wybrane przykłady zastosowań MES . . . . .	28
<b>2 Technika MES na przykładzie analizy konstrukcji ramowych</b>	<b>32</b>
2.1 Podatność i sztywność . . . . .	32
2.2 Podstawowe równania pręta . . . . .	35
2.3 Element ramy . . . . .	40
2.3.1 Algorytm wyznaczania macierzy sztywności elementu . . . . .	52
2.3.2 Podłoże typu Winklera . . . . .	53
2.3.3 Kondensacja statyczna i modyfikacja macierzy sztywności . . . . .	55
2.3.4 Wpływ obciążeń międzywęzłowych . . . . .	57
2.4 Globalna macierz sztywności . . . . .	62
2.4.1 Transformacje w układach kartezjańskich . . . . .	62
2.4.2 Uwzględnianie mimośrodków . . . . .	68
2.4.3 Warunki równowagi i zgodności w węzłach . . . . .	71
2.4.4 Warunki brzegowe . . . . .	79
2.4.5 Tablica alokacji . . . . .	84
2.5 Przykład analizy statycznej ramy płaskiej . . . . .	89
<b>3 Algorytmy MES</b>	<b>94</b>
3.1 Wybrane algorytmy numeryczne . . . . .	94
3.2 Algorytmy ideowe . . . . .	102
3.3 Algorytm użytkownika systemu . . . . .	110
<b>4 Analiza statyczna konstrukcji dwu- i trójwymiarowych</b>	<b>113</b>
4.1 Elementy tarczowe . . . . .	113
4.1.1 Podstawowe równania tarczy . . . . .	113
4.1.2 Element prostokątny . . . . .	117
4.1.3 Element trójkątny . . . . .	122
4.1.4 Uogólnione parametry węzłowe . . . . .	126
4.1.5 Elementy wyższych rzędów . . . . .	129
4.2 Element pierścieniowy . . . . .	133
4.3 Elementy trójwymiarowe . . . . .	137
4.3.1 Element czworosieczny . . . . .	137
4.3.2 Inne elementy trójwymiarowe . . . . .	141
4.4 Element płytowy . . . . .	144
4.4.1 Podstawowe równania płyty cienkiej . . . . .	144

4.4.2	Element prostokątny . . . . .	149
4.4.3	Element trójkątny . . . . .	154
4.4.4	Przykłady elementów płytowych dostosowanych . . . . .	159
4.4.5	Warunki brzegowe . . . . .	162
4.5	Elementy powłokowe . . . . .	164
4.5.1	Podstawowe równania technicznej teorii powłok cienkich mało wy- niosłych . . . . .	166
4.5.2	Płaski trójkątny element powłokowy . . . . .	171
4.5.3	Prostokątny element powłoki translacyjnej . . . . .	176
4.5.4	Stożkowy element pierścieniowy . . . . .	186
4.5.5	Warunki brzegowe w powłokach . . . . .	189
4.6	Przykłady zastosowania MES . . . . .	190
<b>5</b>	<b>Wybrane problemy analizy elementu</b>	<b>199</b>
5.1	Koncepcja superelementu . . . . .	199
5.2	Element izoparametryczny . . . . .	201
5.2.1	Rozważania wstępne . . . . .	201
5.2.2	Szczególna postać współrzędnych naturalnych – współrzędne ba- rycentryczne . . . . .	216
5.2.3	Zdegenerowane elementy izoparametryczne . . . . .	221
5.2.3.1	Belka Timoshenki . . . . .	221
5.2.3.2	Płyta Mindlina . . . . .	225
5.2.3.3	Element powłokowy Ahmada . . . . .	228
5.2.4	Niektóre problemy ujęcia izoparametrycznego . . . . .	232
5.3	Przykład zastosowania elementów izoparametrycznych . . . . .	237
<b>6</b>	<b>Metoda elementów skończonych w zagadnieniach dynamiki</b>	<b>240</b>
6.1	Równanie ruchu . . . . .	240
6.2	Macierz bezwładności . . . . .	243
6.2.1	Macierz bezwładności kratownicy . . . . .	243
6.2.2	Macierz bezwładności ramy płaskiej . . . . .	244
6.2.3	Macierz bezwładności ramy przestrzennej . . . . .	245
6.2.4	Macierz bezwładności tarczy (PSN, PSO) . . . . .	246
6.2.5	Macierz bezwładności płyty . . . . .	247
6.2.6	Macierz bezwładności bryły . . . . .	248
6.2.7	Diagonalizacja macierzy bezwładności . . . . .	248
6.3	Macierz tłumienia . . . . .	248
6.4	Drgania swobodne . . . . .	249
6.5	Redukcja liczby stopni swobody . . . . .	252
6.6	Numeryczne całkowanie równania ruchu . . . . .	254
6.6.1	Uogólniona metoda różnic skończonych . . . . .	254
6.6.2	Metoda SSPj (Zienkiewicza–Wood) <sup>1</sup> . . . . .	259
6.6.3	Metoda Newmarka . . . . .	263
6.6.4	Metoda Wilsona . . . . .	265
6.6.5	Metoda Houbolta . . . . .	267
6.6.6	Analiza metod numerycznego całkowania równania ruchu . . . . .	269
6.7	Superpozycja modalna . . . . .	278

---

6.8	Przykłady analizy dynamicznej . . . . .	281
<b>7</b>	<b>Podstawy analizy nieliniowej</b>	<b>286</b>
7.1	Nieliniowości w mechanice konstrukcji . . . . .	286
7.2	Metody numeryczne w analizie nieliniowej . . . . .	291
7.2.1	Metoda przyrostowa . . . . .	291
7.2.2	Metoda iteracyjna . . . . .	294
7.2.3	Metoda mieszana . . . . .	301
7.2.4	Analiza porównawcza metod . . . . .	302
7.3	Nieliniowość geometryczna w prętach . . . . .	305
7.3.1	Element kratownicy płaskiej . . . . .	305
7.3.2	Element ramy płaskiej . . . . .	307
7.4	Ścieżka równowagi . . . . .	310
7.5	Stateczność początkowa . . . . .	316
7.6	Stateczność z udziałem sił bezwładności . . . . .	321
<b>8</b>	<b>Problemy przewodnictwa ciepła</b>	<b>327</b>
8.1	Analiza ustalonego przewodnictwa ciepła w ujęciu MES . . . . .	327
8.2	Zagadnienie dwuwymiarowe . . . . .	331
8.3	Zagadnienie trójwymiarowe . . . . .	334
<b>9</b>	<b>Inne koncepcje i ujęcia MES</b>	<b>337</b>
9.1	Ujęcie naprężeniowe i hybrydowe . . . . .	337
9.1.1	Ujęcie naprężeniowe . . . . .	337
9.1.2	Ujęcie hybrydowe . . . . .	340
9.2	Techniki adaptacyjne . . . . .	342
9.2.1	Rozważania wstępne . . . . .	342
9.2.2	Określenie i miara błędu . . . . .	344
9.2.3	Oszacowania <i>a priori</i> . . . . .	346
9.2.4	Oszacowania <i>a posteriori</i> . . . . .	347
9.2.4.1	Odtwarzanie $L_2$ . . . . .	347
9.2.4.2	Punkty superzbieżności . . . . .	349
9.2.4.3	Koncepcja łąty . . . . .	351
9.2.5	Rozszerzenie $N$ w wersji $p$ z elementami hierarchicznymi . . . . .	353
<b>10</b>	<b>Analiza izogeometryczna w MES</b>	<b>359</b>
10.1	Wstęp . . . . .	359
10.2	Krzywe . . . . .	360
10.2.1	Krzywe B-splajn . . . . .	360
10.2.2	Krzywe NURBS . . . . .	363
10.2.3	Powierzchnie B-splajn i powierzchnie NURBS . . . . .	365
10.2.4	T-splajny . . . . .	367
10.3	Algorytm Analizy Izogeometrycznej . . . . .	368
10.4	Siatki MES i adaptacja . . . . .	370
10.4.1	Adaptacja . . . . .	370
10.4.2	Techniki adaptacji w analizie izogeometrycznej . . . . .	370
10.5	Dwuwymiarowe zadanie teorii sprężystości . . . . .	373

10.5.1	Element skończony tarczy w ujęciu izogeometrycznym . . . . .	373
10.5.2	Przykład . . . . .	373
10.6	Zastosowanie analizy izogeometrycznej w obliczaniu rozkładu temperatury	374
10.7	Podsumowanie i wnioski . . . . .	376
<b>11</b>	<b>Problemy komputerowej implementacji MES</b>	<b>379</b>
11.1	Rozwiązywanie układu równań . . . . .	380
11.1.1	Rozwiązywanie metodą bezpośrednią . . . . .	380
11.1.2	Obliczanie energii . . . . .	384
11.1.3	Rozwiązywanie metodą iteracyjną . . . . .	385
11.1.4	Problemy współpracy z pamięcią zewnętrzną komputera . . . . .	386
11.2	Obliczanie wartości i wektorów własnych . . . . .	388
11.2.1	Wyznaczanie dominującej wartości własnej metodą iteracji odwrotnej	388
11.2.2	Iteracja podprzestrzenna . . . . .	389
11.3	Generowanie siatek . . . . .	390
11.3.1	Technika prymitywów . . . . .	391
11.3.2	Technika superelementów . . . . .	393
11.3.3	Triangularyzacja . . . . .	394
<b>12</b>	<b>Modelowanie tworzyw i obiektów inżynierskich za pomocą MES</b>	<b>400</b>
12.1	Modelowanie fizyczne konstrukcji . . . . .	401
12.2	Modelowanie żelbetu . . . . .	406
12.2.1	Model tarczy żelbetowej . . . . .	406
12.2.2	Modele konstrukcji zginanych . . . . .	408
12.2.3	Model konstrukcji trójwymiarowych . . . . .	411
12.3	Modelowanie obszarów z różnymi stopniami swobody . . . . .	413
12.3.1	Elementy przejściowe . . . . .	413
12.3.1.1	Szeregowy element przejściowy rama–tarcza . . . . .	413
12.3.1.2	Równoległy element przejściowy rama–tarcza . . . . .	417
12.4	Nowe trendy w komputerowym modelowaniu materiałów . . . . .	419
<b>A</b>	<b>Interpolacja Lagrange’a, Serendipa i Hermita</b>	<b>423</b>
A.1	Interpolacja Lagrange’a . . . . .	423
A.2	Funkcje Serendipa . . . . .	425
A.3	Interpolacja Hermita . . . . .	427
<b>B</b>	<b>Całkowanie numeryczne</b>	<b>430</b>
	<b>Literatura</b>	<b>434</b>

# Literatura

- [1] *Babuska I., Zienkiewicz O.C., Gago J., Oliveira E.R.*: Accuracy Estimates and Adaptive Refinement in Finite Element Computations. Wiley, New York 1986.
- [2] *Barlow J.*: Optimal Stress Location in Finite Element Models. Inter. Journ. Num. Meth. Eng., 10, s. 243-251, 1975.
- [3] *Bathe K.J.*: Finite Element Procedures in Engineering Analysis. Prentice-Hall, New Jersey 1982.
- [4] *Bazilev Y., Calo V.M., Cottrell J.A., Evans J.A., Hughes T.J.R., Lipton S., M.A. Scott M.A. and Sederberg T.W.*: Isogeometric analysis using T-splines, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, 199, pp. 229-263, 2010.
- [5] *Benson D.J.*: Bazilevs Y., Hsu M.C., Hughes T.J.R., The Reissnes-Mindlin shell, Compt. Methods Appl. Mech. Engrg., 199, pp.276-289, 2010.
- [6] *Bell K.*: On the Quintic Triangular Plate Bending Element. NTH Report No. 72-2, Trondheim 1972.
- [7] *Berg S.*: Nonlinear Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Plates. NTH, Trondheim Report No. 73-1, 1973.
- [8] *Branicki Cz., Ciesielski R., Kacprzyk Z., Kawecki J., Kączkowski Z., Rakowski G.*: Mecha-nika budowli. Ujęcie komputerowe. Tom 1-2. Arkady, 1991-92.
- [9] *Cichoń Cz. Cecot W., Krok J., Pluciński P.*: Metody komputerowe w liniowej mechanice konstrukcji. Wyd. Politechniki Krakowskiej, Kraków 2010.
- [10] *Cook R.D.*: Concepts and applications of finite element analysis. John Wiley & Sons, 1981.
- [11] *Cortell J.A., Hughes T.J.R., Reali A.*: Studies of refinement and continuity in isogeometric structural analysis, Compt. Methods Appl. Mech. Engrg., 196, pp.4160-4183, 2007.
- [12] *Cristofield M.A.*: A Fast Incremental Iterative Solution Procedures that Handles Snup-Through. Computers & Structures, vol. 13, s. 56-62, 1981.
- [13] *Gallagher R.H.*: Finite Element Analysis. Springer Verlag, Berlin 1976.
- [14] *Gawroński W., Kruszewski J., Ostachowicz W., Tarnowski J., Wittbrodt E.*: Metoda ele-mentów skończonych w dynamice konstrukcji. Arkady Warszawa 1984.
- [15] *Gilewski W., Gomuliński A.*: Physical Shape Functions: A New Concept in Finite Elements, FEN No. 3 (1990).
- [16] *Gomuliński A., Kacprzyk Z., Maj M., Pawłowska B., Sokół T.*: Biblioteka Elementów Skoń-czonych. Poradnik. Praca zb. pod kierunkiem Z. Kacprzyka, Warszawa 1989.
- [17] *Grisfield K.A.*: Non-linear Finite Element Analysis of Solid and Structures, vol. 3. Wiley, Chichester 1991.
- [18] *Grodzki Z., Jankowski J., Kacprzyk Z., Maj M., Orysiak J., Sokół T.*: Podręcznik użytkow-nika podsystemu FEAS/KAM. Praca zb. pod kierunkiem Z. Kacprzyka, Warszawa 1990.
- [19] *Grodzki Z., Kacprzyk Z., Kurowski A., Maj M., Sokół T.*: Podręcznik użytkownika systemu FEAS. Praca zb. pod kierunkiem Z. Kacprzyka, Wyd. Inż. Łąd., Warszawa 1993.
- [20] *Hinton E., Owen D.R.J.*: Finite element software for plates and shells. Pineridge Press Limited, Swansea 1984
- [21] *Hinton E., Owen, D.R.J.*: Computational Modeling of Reinforced Concrete Structures. Pineridge Press Limited, Swansea 1986.
- [22] *Hughes T.J.R., Cohen M., Haroun M.*: Reduced and Selective Integration Techniques in the Finite Element Analysis of Plates. Nuc. Eng. Des., vol. 46, s. 203-222 (1978).

- [23] *Hughes T.J.R., Cottrell J.A., Bazilevs Y.*: Isogeometric analysis, Wiley 2009.
- [24] *Hughes T.J.R., Cottrell J.A., Bazilevs Y.*: Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 194, pp.4135–4195, 2005
- [25] *Hughes T.J.R., Reali A., Sangalli G.*: Efficient quadrature for NURBS-based isogeometric analysis. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 199, pp.301-313, 2010.
- [26] *Kacprzyk Z.*: Analiza drgań komina przemysłowego obciążonego sejsmicznie. *Arch. Inż. Łąd.* 1981, 27, 3, s. 507-516.
- [27] *Kacprzyk Z.*: O stosowaniu funkcji wagowych w metodzie czasoprzestrzennych elementów skończonych. *Zeszyty Naukowe Politechniki Warszawskiej, Budownictwo*, z. 85, 1984.
- [28] *Kacprzyk Z.*: Superelement czasoprzestrzenny. *Arch. Inż. Łąd.* 1981, 28, 1-2, s. 37-42.
- [29] *Kacprzyk Z., Maj M., Pawłowska B. Sokół T.*: *Poradnik Metody Elementów Skończonych*. Wydawnictwo Zakładu Mechaniki Budowli i Zastosowań Informatyki, Warszawa 2011. ISBN 978-83-934725-0-5
- [30] *Kacprzyk Z., Lewiński T.*: Comparison of some numerical integration methods for the equations of motion of systems with a finite number of degrees of freedom. *Rozprawy Inżynierskie*, 31, 2, s. 213-240, 1983.
- [31] *Kacprzyk Z., Orysiak J.*: Generacja siatki w obszarze dwuwymiarowym. *Met. Kom. w Inż. Łąd.*, nr 1-2, s. 81-96, 1992.
- [32] *Kacprzyk Z., Ostapska-Łuczowska K.*: Isogeometric Analysis as a New FEM Formulation - Simple Problems of Steady State Thermal Analysis. In: XXIII Russian - Polish - Slovak Seminar "Theoretical Foundation of Civil Engineering", 25-29 August 2014, Wrocław.
- [33] *Kacprzyk Z., Pawłowska B.*: Generatory siatek struktur przestrzennych. *Met. Kom. w Inż. Łąd.*, nr 4, s.19-33, 1999.
- [34] *Kacprzyk Z., Pawłowska B.*: *Komputerowe Wspomaganie Projektowania. Podstawy i przykłady*. OWPW, Warszawa 2012.
- [35] *Kacprzyk Z., Pawłowska B.*: (1996) Wpływ modelu budynku wysokiego na obliczeniowe drgania własne. *Met. Kom. w Inż. Łąd.*, nr 6, s.43-56, 1996.
- [36] *Kacprzyk Z., Trybocki Z.*: Tarczowy izogeometryczny element skończony. *Theoretical Foundation of Civil Engineering*, XXI . Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Łądowej, Moscow-Arkhangels 2012, s. 165-170
- [37] *Kacprzyk Z., Trybocki Z.*: Isogeometric plane stress analysis, 20th International Conference on Computer Methods in Mechanics. Short Papers. *Editors: Łodygowski T., Rakowski J., Garbowski T., Sumelka W.*, pp. MS03-07-08, Poznań 2013,.
- [38] *Kacprzyk Z., Witkowski M.*: Drgania płyty wywołane siłą poruszającą się asymetrycznym ruchem niejednostajnym. *Konferencja Naukowa Wydziału Inżynierii Łądowej Politechniki Warszawskiej*, 1986, Warszawa, s. 36-42.
- [39] *Kączkowski Z.*: General formulation of the stiffness matrix for the space-time finite elements. *Arch. Inż. Łąd.* 1979, 25, 3, s. 351-357.
- [40] *Kączkowski Z.*: Metoda czasoprzestrzennych elementów skończonych. *Arch. Inż. Łąd.* 1976, 22, 3, s. 365-378.
- [41] *Kączkowski Z.*: *Płyty. Obliczenia statyczne*. Arkady, Warszawa 1980.
- [42] *Kączkowski Z.*: The method of finite space-time elements in dynamics of structures. *J. Techn. Phys.* 1975, 16, 1, s. 69-84.



- [43] *Kiciak P.*: Podstawy modelowania krzywych i powierzchni, WNT, Warszawa 2000.
- [44] *Kleiber M.*: Metoda elementów skończonych w nieliniowej mechanice kontinuum. PWN, Warszawa-Poznań 1985.
- [45] *Kleiber M.*: Wprowadzenie do metody elementów skończonych. PWN, Warszawa-Poznań 1989.
- [46] *Kruszewski J., Gawroński W., Wittbrodt E., Najber F., Grabowski J.*: Metoda sztywnych elementów skończonych. Arkady, Warszawa 1975.
- [47] *Langer J., Klasztorny M.*: Bezwarunkowo stabilne jednokrokowe algorytmy numerycznego całkowania liniowych równań ruchu. Met. Komp. w Inż. Łąd., nr 3-4, t. 1, s. 13-31, 1991.
- [48] *Lewiński P.M.*: Nieliniowa analiza płyt i tarcz żelbetowych Metodą Elementów Skończonych. PWN, Warszawa – Łódź 1990.
- [49] *Łodygowski T., Kąkol W.*: Metoda elementów skończonych w wybranych zagadnieniach mechaniki konstrukcji. Wyd. Politechniki Poznańskiej, Poznań 1991.
- [50] *MacNeal R.H.*: Perspective on finite elements for shell analysis, Finite Elements in Analysis and design, 30, pp. 175-186, 1998.
- [51] *Martin H.C., Carey G.F.*: Introduction To Finite Element Analysis. Mc Graw-Hill, New York 1984.
- [52] *Megörd G.*: Analysis of Thin Shells Using Planar and Curved Finite Elements. NTH Report No 96-1, Trondheim 1969.
- [53] *Ostapska-Luczkowska K.*: Isogeometric Analysis as a new FEM formulation - simple problems of steady state thermal analysis. Masters thesis, Warsaw University of Technology, Faculty of Civil Engineering, 2014
- [54] *Rakowski J.*: A Critical Analysis of Quadratic Beam Finite Elements. Int. Journ. Num. Meth. Eng., vol. 31, s. 949-966 (1991).
- [55] *Robinson J.*: An Introduction to Hierarchical Displacement Elements and the Adaptive Technique. Finite Element in Analysis and Design 1986, 2, s. 377-388, North-Holland.
- [56] *Ross C.T.F.*: Finite element methods in structural mechanics. Ellis Horwood Limited, 1985.
- [57] *Rypl D., Tatzak B.*: From the finite element analysis to the isogeometric analysis in an object oriented computing environment, Advances in Engineering Software, 44, pp.116-125, 2012.
- [58] *Sederberg, T.-W., Zheng, J., Bakenov, A., and Nasri, A.*: T-Splines and T-NURCCs, ACM Transactions on Graphics, 22(3), pp.477-484, 2003
- [59] *Sharan S.K.*: Finite Elements for Infinite Media. FEM in the Design Process, Great Bidlake Manor, Devon 1990.
- [60] *Stein E.*: Milestones of Direct Variational Calculus and its Analysis from the 17th Century until today and beyond – Mathematics meets Mechanics – with restriction to linear elasticity, CAMES, 19, pp. 7-91, 2012
- [61] *Szabo B.A.*: Estimation and Control of Error Based on  $p$ -Convergence. Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations. Edited by *I. Babuska, O.C. Zienkiewicz, J. Gago, E.R. de A.Oliveira*, John Wiley-Sons, Chichester 1986.
- [62] *Szabo B.A.*: The  $p$ - and  $h$ - $p$  Versions of the Finite Element Method in Solid Mechanics. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 1990, 80, s. 185-195, North-Holland.
- [63] *Szilard R.*: Finite Berechnungsmethoden der Strukturmechanik. Bd. 1,2. Wilhelm Ernst Verlag, Berlin 1982-87.

- 
- [64] *Szmelter J., Dacko M., Dobrociński S., Wieczorek M.*: Metoda elementów skończonych w statyce konstrukcji. Arkady, Warszawa 1979.
- [65] *Waszczyszyn Z., Cichoń Cz., Radwańska M.*: Metoda elementów skończonych w stateczności konstrukcji. Arkady, Warszawa 1990.
- [66] *Wiberg N.E., Abdulwahab F.*: Patch Recovery Based on Superconvergent Derivatives and Equilibrium. Inter. Journ. Num. Meth. Eng., 36, s. 2703-2724, 1993.
- [67] *Young T.Y.*: Finite element structural analysis. Prentice-Hall, 1986.
- [68] *Zienkiewicz O.C.*: The Finite Element Method. McGraw-Hill, 1977.
- [69] *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z.* : The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals, Seventh Edition, Elsevier 2013
- [70] *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Fox D.D.* : The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics, Seventh Edition, Elsevier 2013
- [71] *Zienkiewicz O.C., Wood W.L., Hine N.W., Taylor R.L.*: A unified set of single step algorithms. Int. Journ. for Num. Meth. in Eng., vol. 20, s. 1529-1552, 1984.
- [72] *Zienkiewicz O.C., Zhu J.Z.*: A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis. Inter. Journ. Num. Meth. Eng., 24, s. 337-357, 1987.
- [73] *Zienkiewicz O.C., Zhu J.Z.*: Adaptivity and Mesh Generation. Inter. Journ. Num. Meth. Eng., 32, s. 783-810, 1991.
- [74] *Zienkiewicz O.C., Zhu J.Z.*: The Superconvergent Patch Recovery and a Posteriori Error Estimates. Part 1, Inter. Journ. Num. Meth. Eng., 33, s. 1331-1361, 1992.